Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L1-Maths/PMRC
Analyse
Année 2017-2018

Feuille 6 - fonctions dérivables

Rappels : Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est <u>dérivable</u> en $x_0 \in I$ si la limite $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe ; on la note $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

<u>Théorème de Rolle</u> : Soit f continue dans l'intervalle $[a.b]$ et dérivable dans $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

<u>Théorème des accroissements finis</u> : Soit f continue dans l'intervalle $[a.b]$ et dérivable dans $]a,b[$; alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-c}$. Si en plus $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifie les mêmes hypothèses que f et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$; alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice I : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si f dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
2. Si f continue en x_0 alors f est dérivable en x_0.
3. Si f est dérivable sur I alors $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue.
4. Si f n'est pas dérivable en x_0, alors f n'est pas continue en x_0.

Exercice II : Etudier la dérivablilité, sur leur domaine de définition, des fonctions suivantes :

1. $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$;
2. $f : [-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x+1}\sin x$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\cos(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice III : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ \frac{2-\ln x}{4} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. En quels points la fonction f est-elle continue ?
2. En quels points est-elle dérivable ? En chacun des points, donner la dérivée.

Exercice IV : Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2+bx+1 \quad \text{si} \quad x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice V : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice VI : Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geqslant 0$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
2. En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
3. En déduire l'inégalité suivante :

$$(1 + x)^n \leqslant 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

4. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x + y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n)\,.$$

Exercice VII : (Rolle) Montrer que le polynôme $x^n + ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ admet au plus trois racines réelles. (Indication : on applique plusieurs fois le théorème de Rolle).

Exercice VIII : (accroissements finis) Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre "c" de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice IX : (accroissements finis) Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y\,.$$

De l'étude de f déduire que pour tout $\alpha \in]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y)\,.$$

Interprétation géométrique ?

Exercice X : (accroissement finis - 2ème partie) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On suppose que $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell$ (règle de l'Hôptal). Calculer

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$