Université de Bretagne Occidentale | L1-Maths/PMRC
Faculté des Sciences et Techniques | Analyse
Département de Mathématiques | *Année 2017-2018*

Feuille 2 - Inégalités, suites numériques 1

Rappels : Pour un nombre réel a on définit sa norme ou sa valeur absolue par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

• l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

Récurrence : On veut démontrer(ou définir) une propriété $P(n)$ qui concerne les nombres naturels : on montre d'abord $P(1)$, puis on montre que $P(1), P(2), \ldots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$. On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Discriminant d'une quadratique : Le discriminant du polynôme quadratique $ax^2 + bx + c$ est le nombre $b^2 - 4ac$. Si $b > 0$ le polynôme présente deux racines réelles ; si $b = 0$ il ne présente qu'une seule racine ; si $b < 0$ il ne présente aucune racine réelle.

Exercice I : (a) Préciser quand on a l'égalité dans l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.
(b) A partir de l'inégalité triangulaire, montrer que $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$ et préciser quand on a l'égalité.

Exercice II : (L'inégalité de Cauchy-Schwarz) (a) Montrer que pour a et b des nombres réels on a l'inégalité :

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)\,.$$

Préciser quand on a l'égalité.

(b) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n)^2 \leqslant ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots {b_n}^2)$$

pour des nombres réels $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Préciser quand on a l'égalité.
Indication : Etudier la quadratique en t associée à la quantité $(a_1t + b_1)^2 + \cdots + (a_nt + b_n)^2$.

(c) En déduire que pour des nombre réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on a l'inégalité :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)\,.$$

Préciser quand on a l'égalité.

Exercice III : Pour les suites suivantes, est-ce-qu'on sait déterminer le n-ième terme quelque soit n ?
(a) $1, 5, 4, 8, 7, 11, 10, 14, \ldots$
(b) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ (suite des nombres premiers)
(c) $a_1 = k$ un nombre naturel donné, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 \text{ si } a_n \text{ paire} \\ 3a_n + 1 \text{ si } a_n \text{ impaire} \end{cases}$ (qu-est-ce qui se passe si $k = 7$?)
(d) $3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, \ldots$ (coefficients dans le développement décimal de π.

Exercice IV : Déterminer le n-ième terme de la suite :

(a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

(b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

(c) $99, 199, 299, 399, 499, \ldots$

(d) $3, -5, 7, -9, 11, \ldots$

(e) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \ldots$

(f) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, -\frac{5}{14}, \ldots$

Exercice V : Ecrire les 5 premiers termes des suites $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suivantes :

(a) $a_{n+1} = a_n - 1,\ a_1 = 3\,;$

(b) $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} - 1,\ a_1 = 5\,;$

(c) $a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 - n^2}{2},\ a_1 = 1\,;$

(d) $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n},\ a_1 = -3,\ a_2 = -6\,;$

(e) $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n + n^2,\ a_1 = 2,\ a_2 = 10\,;$

(f) $a_{n+1} = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+1},\ a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1.$

Exercice VI : Déterminer la monotonicité des suites suivantes :

(a) $a_n - a_{n+1} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (a_{n+1} > 0)$

(c) $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (a_{n+1} > 0)$

(d) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

(e) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

(f) $\left(\dfrac{n^2}{2-3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(g) $\left(\dfrac{1-(-1)^n}{6}\right)_{n=1}^{\infty}$

(h) $\left(n^{1/n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(i) $\left(n^{1/n}\right)_{n=3}^{\infty}$ (remarque : $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n$).

Exercise VII : En appliquant l'Exercice VI(i), déterminer la limite de la suite $\left(n^{1/n}\right)_{n=1}^{\infty}$. (Indication : soit $a_n = n^{1/n}$ et considérer la suite $a_{2^{2^n}}$.)