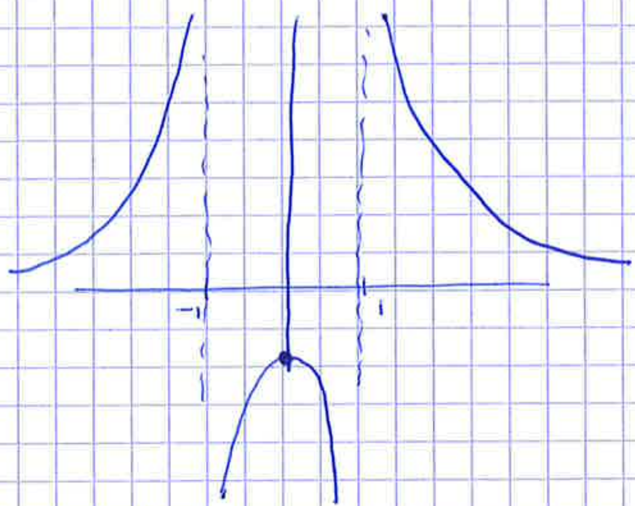
Feuille 5 : Solutions (sélection)

I (a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

Domaine $= \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

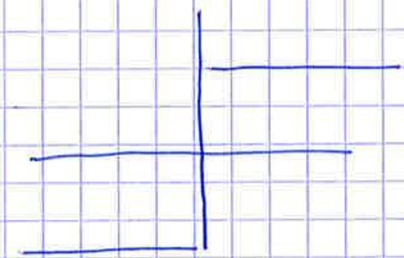
Image $=]-\infty, -1] \cup]0, \infty[$



(c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Domaine $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Image $= \{-1, +1\}$



(d) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ $\quad \sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ~~$\sin(k\pi) =$~~

Pour $x = 0$, $\dfrac{x}{\sin x} = 1$

Domaine $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$

On remarque que $f(x) = f(-x)$, il s'agit d'une fonction paire

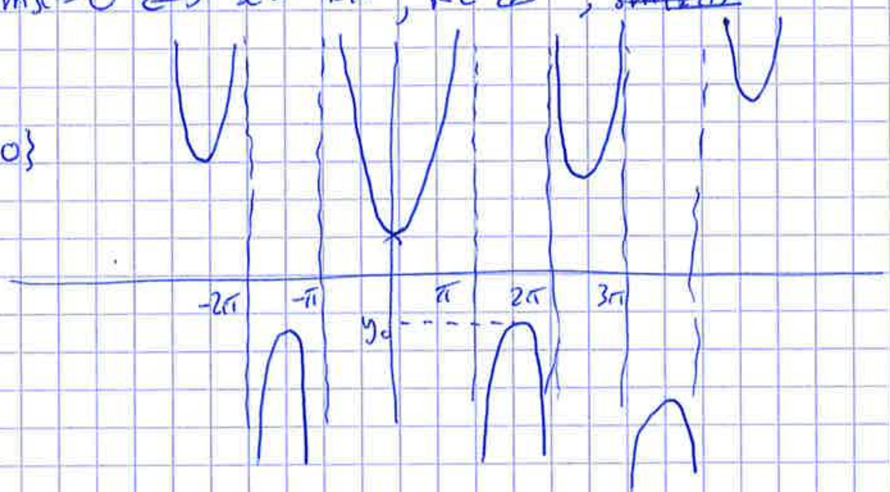


Image $=]-\infty, y_0] \cup [1, \infty[$ où y_0 est ~~solut~~ $\dfrac{1}{\cos x_0}$ avec x_0 solution de $x_0 = \tan x_0$ $\quad \pi < x_0 < 2\pi$

En effet $f' = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$, $f' = 0$ lorsque $x = \tan x$

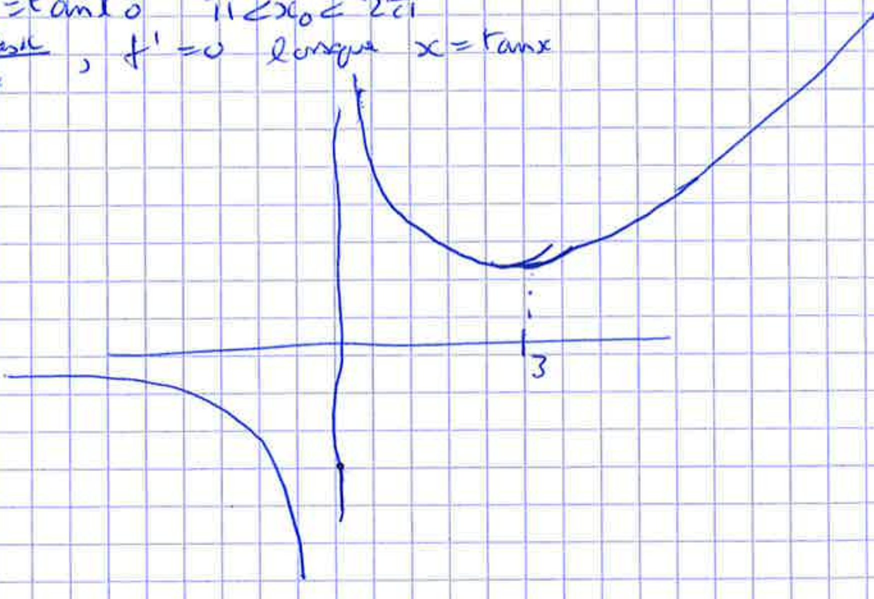
(e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$

$f' = \dfrac{x^3 e^x - 3x^2 e^x}{x^6}$

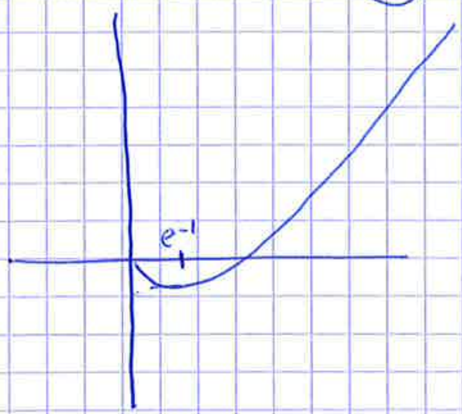
$= 0$ lorsque $x = 3$

Domaine $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Image $=]-\infty, 0[\cup [3, \infty[$



(f) $f(x) = x \ln x$; $x > 0$ afin que $\ln x$ soit défini



$f(x) = \ln x^x$

lorsque $x \to 0$, $x^x \to 1$ et $f(x) \to 0$

en effet $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n^{1/n}} \to \frac{1}{1}$ lorsque $n \to \infty$

$f'(x) = \ln x + 1$ initialement décroissante

$f(1) = 0$

Minimum $f' = 0$: $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

en ce point $f(x) = -e^{-1}$

Domaine $=]0, \infty[$, Image $= [-e^{-1}, \infty[$

(g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2+3x}{5-2x}}$ $\quad \dfrac{2+3x}{5-2x} \geq 0$ ssi (i) $2+3x \geq 0$ et $5-2x > 0$

ou (ii) $2+3x \leq 0$ et $5-2x < 0$

Cas (i) $2+3x \geq 0$ et $5-2x > 0 \iff x \geq -\frac{2}{3}$ et $x < \frac{5}{2}$

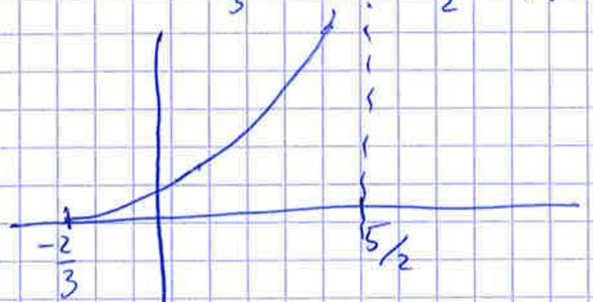
$\iff x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$

Cas (ii) $2+3x \leq 0$ et $5-2x < 0 \iff x \leq -\frac{2}{3}$ et $x > \frac{5}{2}$ impossible.

Domaine $= [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$

Image $= [0, \infty[$

(on prend la racine positive)



(h) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{(x-3)(x+2)}$

$(x-3)(x+2) \geq 0 \iff$ (i) $x-3 \geq 0$ et $x+2 \geq 0 \iff x \geq 3$ et $x \geq -2$

ou (ii) $x-3 \leq 0$ et $x+2 \leq 0 \iff x \leq +3$ et $x \leq -2$

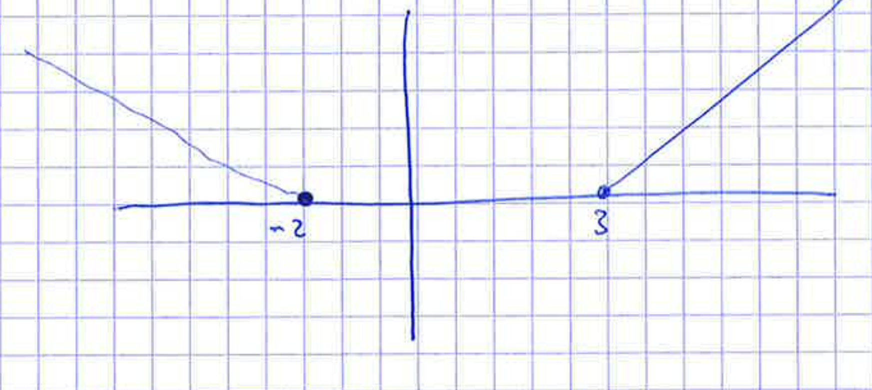
Cas (i) $x \geq 3$

cas (ii) $x \leq -2$.

Domaine $=]-\infty, -2] \cup [3, \infty[$

Image $= [0, \infty[$

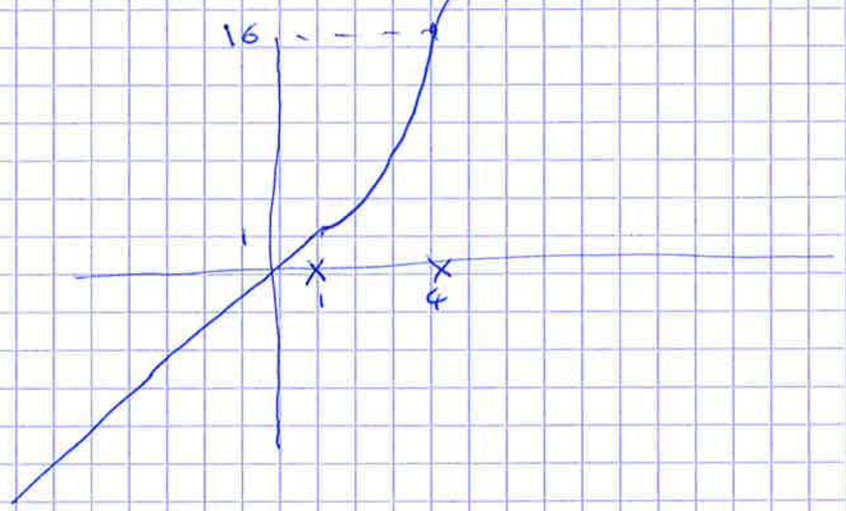
on prend la racine positive.



II

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1.



2. Oui f est bien continue (pas de "sauts" dans le graphe)

3. ~~Pour~~ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, donc son inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe (car elle est croissante)

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } \cancel{x}\, y < 1 \\ \sqrt{y} & \text{si } 1 \leq y \leq 16 \quad (\text{on pose } y = x^2 \text{ d'où } x = \sqrt{y}) \\ \dfrac{y^2}{64} & \text{si } y > 16 \quad (\text{on pose } y = 8\sqrt{x} \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{64}) \end{cases}$$

III

$f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-1}$

Soit $\varepsilon > 0$ alors $|f(x) + 3| \leq \varepsilon$ ssi $\left|\dfrac{2x+3}{3x-1} + 3\right| \leq \varepsilon$

ssi $\left|\dfrac{2x+3+9x-3}{3x-1}\right| \leq \varepsilon \iff \left|\dfrac{11x}{3x-1}\right| \leq \varepsilon$

On suppose $x \geq 0$ avec $3x - 1 < 0$ $(x < \frac{1}{3})$

Il ~~nous faut~~ $\left|\dfrac{11x}{3x-1}\right| = \dfrac{11x}{1-3x}$, alors $\dfrac{11x}{1-3x} \leq \varepsilon \iff 11x \leq \varepsilon(1-3x)$

$\iff x(11 + 3\varepsilon) \leq \varepsilon \iff x \leq \dfrac{\varepsilon}{11+3\varepsilon}$

On suppose $x \leq 0$, alors $\left|\dfrac{11x}{3x-1}\right| = \dfrac{-11x}{1-3x}$ alors $\dfrac{-11x}{1-3x} \leq \varepsilon \iff -11x \leq \varepsilon(1-3x)$

$\iff -\varepsilon \leq x(-3\varepsilon + 11) \iff \dfrac{-\varepsilon}{11-3\varepsilon} \leq x$

On voit que $\dfrac{\varepsilon}{11+3\varepsilon} < \dfrac{\varepsilon}{11-3\varepsilon}$ on choisit alors $\delta = \dfrac{\varepsilon}{11+3\varepsilon}$

~~Pour~~ $|x| \leq \delta \Rightarrow -\delta \leq x \leq \delta \Rightarrow -\dfrac{\varepsilon}{11+3\varepsilon} \leq x \leq \dfrac{\varepsilon}{11+3\varepsilon} \Rightarrow -\dfrac{\varepsilon}{11-3\varepsilon} \leq x \leq \dfrac{\varepsilon}{11+3\varepsilon}$

$\Rightarrow |f(x) + 3| \leq \varepsilon$

On conclut que f est continue en $x = 0$

IV (a) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$: OUI, en effet le seul point suspect est $x=0$

Mais $|\sin y| \leq 1 \ \forall y$

donc $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ et on peut prolonger f en $x=0$ en définissant $f(0)=0$

(b) $g(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Il nous faut nos connaissances des développements limités :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

d'autre part $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$

et donc $\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

et $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{x}{2} + O(x^3)$

Il s'ensuit que g se prolonge continûment en $x=0$ en définissant $g(0)=0$

(c) $h(x) = \frac{1}{(1-x)} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$

Même si h se prolonge continûment en $x=1$, elle ne se prolonge pas continûment en $x=-1$. NON !

V $f : [a,b] \to [a,b]$, $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| < |x-y|$

1. Soit $x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, soit $\delta = \varepsilon$
alors $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x-y| < \delta = \varepsilon$

d'où f est continue en x et puisque x est arbitrairement choisi, f est continue sur $[a,b]$.

2. Soit $g(x) = f(x) - x$. Alors $f(x) = x$ ssi $g(x) = 0$

D'abord g est continue étant la somme de deux fonctions continues

Existence de solution $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \geq a$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \leq b$

Donc il existe x t.q. $g(x) = 0$ (Thm des valeurs intermédiaires)

Unicité si $g(x) = g(y) = 0 \Rightarrow f(x) = x$ et $f(y) = y$

$\Rightarrow |x-y| < |x-y|$ absurde, donc le point est unique

VI 1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x-y|$

donc $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$ $\forall x \in I$

et le résultat s'ensuit de la définition de limite.

2. f, g continues $\Rightarrow$ $f+g$ et $f-g$ continues,

et ~~enfin~~ puis 1. $\Rightarrow$ $|f-g|$ continue

Il s'ensuit que $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ continue.

VII $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ croissante t.q. $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ décroissante

Soit $x_0 \in]0,\infty[$. Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

en calculant les limites en x_0^+ et x_0^-

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$: f croissante : $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

et puisque $\frac{f(x)}{x}$ décroissante

$$x \geq x_0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x_0)}{x_0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\frac{x}{x_0}$$

Ainsi $x \geq x_0 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)\frac{x}{x_0}$

Alors d'après le Thm des gendarmes $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$: similaire

donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f$ continue en x_0

VIII Alors la fonction $g-f$ est strictement positive sur l'intervalle fermé $[0,1]$, elle présente alors un minimum $\delta > 0$

c.à.d : $g(x) - f(x) \geq \delta > 0$ $\forall x \in [0,1]$

soit $m = \frac{\delta}{2}$: $g(x) \geq f(x) + \delta > f(x) + m$.

Non, par exemple soit $f(x) = x^2$, $g(x) = x$

alors $f(x) < g(x)$ $\forall x \in]0,1[$, mais il n'existe pas de ~~tel~~ tel m. En effet $\lim\limits_{x \to 0}(g(x) - f(x)) = 0$

IX $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\left([2x] - 2[x]\right)$ $[x]$ = partie entière de x = plus grand entier $\leq x$

$x=-2$: $f(-2) = -2\times(-4+4) = 0$

$-2 < x < -\frac{3}{2}$ $f(x) = x(-4+4) = 0$

$x = -\frac{3}{2}$: $f(x) = -\frac{3}{2}\left([-3] - 2\times(-2)\right) = -\frac{3}{2}(-3+4) = -\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2} < x < -1$ $f(x) = x(-3+4) = x$

$x=-1$: $f(x) = -1\times(-2+2) = 0$

$-1 < x < -\frac{1}{2}$: $f(x) = x(-2+2) = 0$

$x = -\frac{1}{2}$: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\times(-1+2) = -\frac{1}{2}$

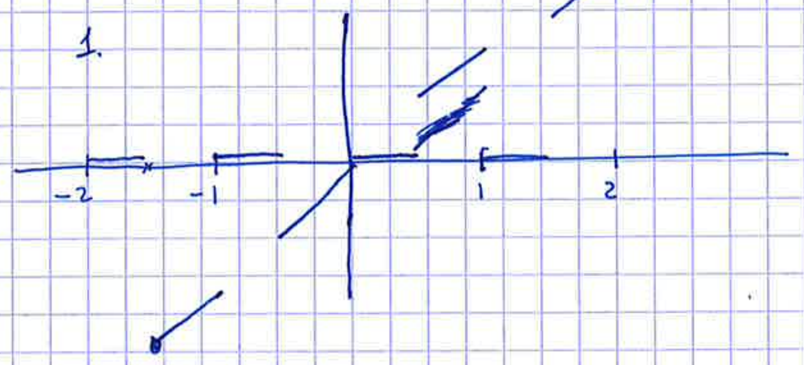
$-\frac{1}{2} < x < 0$ $f(x) = x\times 1$

$f(0) = 0$

$0 < x < \frac{1}{2}$: $f(x) = x\times 0 = 0$

$\frac{1}{2} \leq x < 1$: $f(x) = x(1) = x$ etc

1.



2. f est continue en tout point sauf les point $\frac{k}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$.

X $f: [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0) = f(1)$

Soit $\phi: [0, 1-\frac{1}{n}]\to\mathbb{R}$, $\phi(x) = f(x) - f(x+\frac{1}{n})$

$$\phi(0)+\phi(\tfrac{1}{n})+\phi(\tfrac{2}{n})+\dots+\phi\left(\tfrac{n-1}{n}\right) = f(0) - f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{1}{n}) - f(\tfrac{2}{n}) + \dots + f(1-\tfrac{1}{n}) - f(1)$$

$$= f(0) - f(1) = 0.$$

Soit : $\phi(0) = \phi(\frac{1}{n}) = \phi(\frac{2}{n}) = \dots = \phi(1-\frac{1}{n}) = 0$

et il existe des point, par exemple $\alpha_n = \frac{1}{n}$ t.q. $f(\alpha_n) = f(\alpha_n + \frac{1}{n})$

Soit $\exists\ \frac{k}{n}$ avec $\phi(\frac{k}{n}) < 0$ et $\exists\ \frac{l}{n}$ avec $\phi(\frac{l}{n}) > 0$

Puisque ϕ est continue (étant la somme de fonctions continues), $\exists\ \alpha_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ t.q. $\phi(\alpha_n) = 0$, c'est à dire $f(\alpha_n) = f(\alpha_n + \frac{1}{n})$