Feuille 2 - Tribus

Exercice I : Soient $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y et A et B deux parties de X.

1) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et qu'on peut ne pas avoir l'égalité . Que se passe-t-il si f est injective ?

3) Montrer que $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \supset A$ et que l'on peut ne pas avoir l'égalité .

4) Soient C, C_1, C_2 des parties de Y. Montrer que

$$f\Big(f^{-1}(C)\Big) = C \cap f(X) \; ; \quad f^{-1}\Big(C_1 \cup C_2\Big) = f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2) \; ;$$

$$f^{-1}\Big(C_1 \cap C_2\Big) = f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) \; ; \quad f^{-1}\Big(C^c\Big) = \Big(f^{-1}(C)\Big)^c .$$

Exercice II : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1) Montrer que si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y alors $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X.

2) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X alors $f(\mathcal{A}) := \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y.

3) Déterminer deux ensembles X et Y, une application $f : X \to Y$ et une tribu $\mathcal{A}$ sur X tels que $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ ne soit pas une tribu sur Y.

Exercice III : Soit X un ensemble. Montrer que

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable } \} \; .$$

est une tribu sur X.

Exercice IV : Soient A et B deux parties d'un ensemble X.

1) Déterminer la tribu $\sigma(A)$ de X engendrée par A.

2) Déterminer $\sigma(A, B)$, la tribu de X engendrée par A et B.

3) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de X où I est un ensemble dénombrable d'indices.
Montrer que

$$\sigma(A_i \; ; \; i \in I) = \Big\{ \bigcup_{j \in J} A_j \; : \; J \in \mathcal{P}(I) \Big\}$$

avec la convention $\displaystyle\bigcup_{j \in \emptyset} A_j = \emptyset$.

Exercice V : Vrai ou Faux ?

1)
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0,1] \ ; \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right[= [0,1] \ .$$

2) Tout intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme intersection dénombrable d'intervalles ouverts.

3) Tout intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice VI : En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles ouverts. (On pourra procéder en deux étapes :

(a) montrer que l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{]s, t[\subset \mathbb{R} \mid s, t \in \mathbb{Q} \ , \ s < t\}$$

est dénombrable ;

(b) montrer que si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors

$$\mathcal{O} = \bigcup_{]s,t[\subset \mathcal{O} \ ; \ ]s,t[\in \mathcal{D}}]s, t[\ . \quad)$$

Exercice VII : Soient $\mathcal{I} := \{ \ ]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \ , \ a < b \ \}$ et $\sigma(\mathcal{I})$ la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{I}$.

1) Montrer que $\sigma(\mathcal{I})$ contient les singletons de $\mathbb{R}$, que $\mathbb{Q} \in \sigma(\mathcal{I})$ et que $\sigma(\mathcal{I})$ contient des éléments qui ne sont pas réunion dénombrable de singletons de $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\sigma(\mathcal{I})$ est égale à la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$.

Exercice VIII : Soit $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A = -A\}$.

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que $\{f^{-1}(B) \mid B \subset \mathbb{R}\} = \mathcal{T}$.