Feuille 1

Exercice I : On rappelle que la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ est naturellement munie d'une relation d'ordre total.

Soient A et B deux parties de $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Décrire avec des quantificateurs les propriétés :
(i) A est majorée dans $\mathbb{R}$;
(ii) A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.

2) Comment définit-on la quantité $\sup(A)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$?

3) Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

4) Montrer que $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$ si $\sup(A)$ est réel.

5) Montrer que l'on a : $-\inf(A) = \sup(-A)$.

6) Vérifier que si $A \subset B$ alors $\inf(B) \leqslant \inf(A)$.

Exercice II : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réel. On définit les limites supérieure et inférieure de la suite (x_n) par, respectivement,

$$\limsup(x_n) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k \geqslant n} x_k = \inf\{\sup\{x_k \mid k \geqslant n\} \mid n \in \mathbb{N}\} ,$$

$$\liminf(x_n) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k \geqslant n} x_k = \sup\{\inf\{x_k \mid k \geqslant n\} \mid n \in \mathbb{N}\} .$$

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels.

1) Déterminer la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque

$$x_n = n \ ; \quad x_n = \frac{1}{n+1} \ ; \quad x_n = (-1)^n .$$

2) Montrer que $\liminf(-x_n) = -\limsup\,(x_n)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\inf_{k \geqslant m} x_k \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k$.
En déduire que $\liminf(x_n) \leqslant \limsup(x_n)$.

4) Vérifier que la limite supérieure de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $\left(\sup_{k \geqslant n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Montrer que si, pour tout n à partir d'un certain rang, on a $x_n \leqslant y_n$ alors

$$\limsup(x_n) \leqslant \limsup(y_n) \quad \text{et} \quad \liminf(x_n) \leqslant \liminf(y_n) .$$

6) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que si $\limsup(x_n)$ appartient à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors il existe un entier n_0 tel que $\sup_{k \geqslant n_0} x_k \leqslant \varepsilon + \limsup(x_n)$.

Soit l un élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que la suite (x_n) converge vers l si, et seulement si, $\liminf(x_n) = \limsup(x_n) = l$.

7) Montrer que

$$\liminf(x_n) + \liminf(y_n) \leqslant \liminf(x_n + y_n)$$

et que

$$\limsup(x_n + y_n) \leqslant \limsup(x_n) + \limsup(y_n)\ .$$

Montrer que si $\limsup(x_n)$ ou $\liminf(y_n)$ appartient à $\mathbb{R}$ alors

$$\liminf(x_n + y_n) \leqslant \limsup(x_n) + \liminf(y_n)\ .$$

A-t-on $\liminf(x_n + y_n) \leqslant \liminf(x_n) + \liminf(y_n)$ en général ?

Exercice III :

1) Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est infini dénombrable. En déduire que si A et B sont des ensembles dénombrables alors $A \times B$ est dénombrable.

Montrer que tout produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

2) En utilisant la question précédente, montrer que toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

3) Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont infinis dénombrables.

4) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice IV : Le but de cet exercice est de montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

1) Justifier que $[0,1]$ est infini.

2) On suppose qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to [0,1]$.

Montrer qu'alors il existe une suite d'intervalles fermés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenus dans $[0,1]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$ et $f(n) \notin I_n$.

En déduire que $[0,1]$ n'est pas dénombrable.

3) Comment modifier le raisonnement précédent pour rendre inutile la question 1 ?

4) Qu'en est-il de $\mathbb{R}$? Qu'en est-il de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Exercice V : Vrai ou Faux ?

1)

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0,1]\ ; \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right[= [0,1]\ .$$

2) Tout intervalle $[a,b[$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme intersection dénombrable d'intervalles ouverts.

3) Tout intervalle $[a,b[$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice VI : Soit X un ensemble et soient A, B et C des parties de X.

a) Montrer que

$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_X - \mathbb{1}_A \ ; \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \ ;$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \ ; \quad \mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 \ .$$

(où $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ désigne la différence symétrique).

b) Montrer que

$$\mathbb{1}_{\cup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\cap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i} \ ,$$

où $(A_i)_{i\in I}$ désigne une famille quelconque de parties de X.

c) Déduire du a) une condition nécessaire et suffisante pour que

$$A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B) \cap (A\Delta C) \ .$$

Exercice VII : Soient $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y et A et B deux parties de X.

1) Montrer que $f(A\cup B) = f(A) \cup f(B)$,

2) Montrer que $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et qu'on peut ne pas avoir l'égalité . Que se passe-t-il si f est injective ?

3) Montrer que $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \supset A$ et que l'on peut ne pas avoir l'égalité .

4) Soient C, C_1, C_2 des parties de Y. Montrer que

$$f\Big(f^{-1}(C)\Big) = C \cap f(X) \ ; \quad f^{-1}\Big(C_1 \cup C_2\Big) = f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2) \ ;$$

$$f^{-1}\Big(C_1 \cap C_2\Big) = f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) \ ; \quad f^{-1}\Big(C^c\Big) = \Big(f^{-1}(C)\Big)^c \ .$$

Exercice VIII : *(Théorème de Bernstein)*
Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E. On se propose de montrer qu'il existe une bijection de E dans F.

On note $h = g \circ f$ et, pour toute partie C de E, on introduit la famille

$$\mathcal{F}(C) = \{M \subset E \mid C \cup h(M) \subset M\} \ .$$

1) Soit C une partie de E.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F}(C)$ n'est pas vide.

b) Montrer qu'une intersection quelconque d'éléments de $\mathcal{F}(C)$ est un élément de $\mathcal{F}(C)$.

c) Montrer que si $M \in \mathcal{F}(C)$ alors $C \cup h(M) \in \mathcal{F}(C)$.

2) On pose

$$R = E \setminus g(F)\ , \quad A = \bigcap_{M \in \mathcal{F}(R)} M\ , \quad B = E \setminus A\ , \quad A' = f(A) \quad \text{et} \quad B' = g^{-1}(B)\ .$$

a) Vérifier que la restriction de g à B' est une bijection de B' dans B.

b) Montrer que $\{R, h(A), B\}$ est une partition de E et qu'en particulier $A = R \cup h(A)$.

c) Montrer que $\{A', B'\}$ est une partition de F.

d) Conclure en considérant l'application φ de E dans F définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A\ , \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in B\ . \end{cases}$$