Université de Bretagne Occidentale | L3-Maths
Faculté des Sciences et Techniques | Intégrale de Lebesgue
Département de Mathématiques | *Année 2015-2016*

Feuille 8 - Espaces L^p

Rappel : Étant donné un espace mesuré (Ω, Σ, μ), on note pour $1 \leqslant p < +\infty$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^p(\Omega,\mu) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : ||f||_p < \infty\}, \text{ avec } ||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \\
\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : ||f||_\infty < \infty\}, \text{ avec } ||f||_\infty = \inf\{M \geqslant 0 : |f| \leqslant M \;\; \mu - pp\}
\end{aligned}$$

On définit les espaces $L^p(\Omega,\mu)$ comme les espaces vectoriels quotients de $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu - pp$.

Exercice I : a) Pour quel $p > 0$ est-ce-que la fonctions $f(x) = x^{1/7}$ appartient à $L^p([0,1], \lambda)$?

b) Pour quel $p > 0$ est-ce-que la fonction $x^{-1/7}$ appartient à $L^p([1,\infty[\,, \lambda)$?

c) Pour quel $p > 0$ est-ce-que la fonction $f(x) = e^{-x}$ appartient à $L^p([0,\infty[\,, \lambda)$?

Exercice II : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $[0,\infty]$ telles que $fg \geqslant 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geqslant \mu(X)^2$.

b) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $1/f$ soit intégrable. Que peut-on dire de la mesure μ ?

Exercice III : a) Montrer que pour tout $r > 1$ et pour tous x, y réels positifs, $|x^r - y^r| \leqslant r|x - y|(x+y)^{r-1}$.

b) Soit $p > 1$ et soit (f_n) une suite de fonctions positives qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}_+)$. Montrer que $\forall r \in [1,p]$, la suite (f_n^r) converge vers f^r dans $L^{p/r}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice IV : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(X,\mu)$ et $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de $L^1(X,\mu)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_x f d\mu$.

a) Montrer que si les fonctions f_n sont positives et si la suite (f_n) converge presque partout vers f, alors (f_n) converge vers f dans $L^1(X,\mu)$ (indication : on pourra considérer $g_n = \min(f, f_n) = \frac{1}{2}(f + f_n - |f - f_n|)$).

b) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ définie par $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[}$. Montrer que (f_n) converge vers 0 et que $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = 0$. La suite (f_n) converge-t-elle vers 0 dans L^p pour $p \geqslant 1$?

Exercice V : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in]1, +\infty[\,, q = p/(p-1)$. On dit que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de $L^p(X,\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(X,\mu)$ si, pour tout $g \in L^q(X,\mu)$, $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu$.

a) Montrer que la convergence dans $L^p(X,\mu)$ entraine la convergence faible.

b) Soit $f_n(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)e^{inx}$ et $g \in L^q(X,\mu)$. Soit ϕ une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\phi) \subset [0,1]$ (où $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{f \neq 0\}}$). Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \left|\int_0^1 g(x)e^{inx}dx\right| \leqslant \int_0^1 |g(x)-\phi(x)|dx$. En déduire que e^{inx} converge faiblement vers 0.

Exercice VI : (L'inégalité de Hardy) Soit $p \in]1,+\infty[$. A toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est bien définie (inégalité de Holder) .

b) On suppose que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est continue à support compact. Montrer que F appartient à $C^1 \cap L^p$ et que

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p dx = -p\int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1}F'(x)dx$$

puis que

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} f(x)F(x)^{p-1}dx$$

c) En déduire l'inégalité de Hardy :

$$||F||_p \leqslant \frac{p}{p-1}||f||_p\,.$$

Exercice VII : En prenant $(X,\mathcal{A},\mu) = (]0,1[,\mathcal{B},\lambda)$, donner un exemple pour lequel la suite $(||f_n||_p)_{n\in\mathcal{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $||f||_p < \lim_{n\in\mathcal{N}} ||f_n||_p$. (On pourra traiter séparément les cas $1 \leqslant p < \infty$ et $p = \infty$).

Exercice VIII : a) Montrer que si $f \in L^p \cap L^q$, $1 \leqslant q \neq p < \infty$, alors pour tout r entre p et q, on a $f \in L^r$. Montrer que de plus, si $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$, on a

$$||f||_r \leqslant ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}\,.$$

Que se passe t'il lorsque $p = \infty$?

b) Montrer que si μ est une mesure finie, on a $L^\infty \subset \cap_{p\geqslant 1} L^p$. Montrer par un exemple que l'on n'a pas égalité en général.

c) Si μ est une mesure finie, montrer que pout tout f, $\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.

Exercice IX : (Lemme de Scheffé) Soient $p \in [1,\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathcal{N}}$ une suite de $L^p(\mu)$ qui converge μ - pp vers une fonction $f \in L^p(\mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||f_n||_p = ||f||_p\,.$$

(Indication : considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = |f_n - f|^p)$.