Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3-Maths
Intégrale de Lebesgue
Année 2015-2016

Feuille 7 - Intégrales multiples
et changements de variables

Exercice I : On considère le domaine borné D du plan euclidien délimité par les courbes d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$ dans un repère orthonormé. Calculer l'aire de D puis l'intégrale

$$\int_D \frac{y}{x}\, dxdy \, .$$

Exercice II : On considère la fonction $f(x, y) = e^{-xy^2}$.

Montrer que $f \in \mathrm{L}^1\left([0; a] \times [0; +\infty[\right)$ pour tout réel $a > 0$.

La fonction f appartient-elle à $\mathrm{L}^1\left([0; +\infty[\times[0; +\infty[\right)$?

Exercice III : Soit la fonction $f(x, y) = \mathrm{e}^{-xy}\sin(y)$.

Est-ce que $f \in \mathrm{L}^1\left([0; 1] \times [0; 1]\right)$? A-t-on $f \in \mathrm{L}^1\left([0; 1] \times [0; +\infty[\right)$?

Exercice IV : En utilisant la fonction $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x(1+y^2)}$, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \, .$$

Exercice V : Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et deux fonctions mesurables h et k telles que, pour toute fonction mesurable positive $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to [0; +\infty]$, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} g\left(x + y, \frac{x}{x + y}\right) x^{a-1}y^{b-1}\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}\, dxdy = \int_V g(u, v)\, h(u)k(v)\, dudv \, ,$$

où a, b et λ sont des réels strictement positifs.

Vérifier que ces quantités sont finies lorsque g est bornée.

En déduire une expression du rapport

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}$$

sous la forme d'une intégrale.

Exercice VI : Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} x\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu\left(]t; +\infty[\right)\, dt \, .$$

Exercice VII : En utilisant un changement de variable en coordonnées polaires, retrouver la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx\ .$$

Exercice VIII :

1) Calculer les intégrales
$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du\,,$$
en effectuant un changement de variables $u = \sin(\theta)$ ou $u = \cos(\theta)$.

2) Montrer que l'on a
$$\int_{[0;1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\ .$$

En effectuant le changement de variables : $x = u - t$, $y = u + t$, dans l'intégrale précédente, montrer que
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$