UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3-MATHS
INTÉGRALE DE LEBESGUE
Année 2015-2016

Feuille 3 - Mesures (positives)

Exercice I : Soient $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble X et μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$. Soient α et β deux éléments de $[0, +\infty]$.

Vérifier que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \alpha\mu + \beta\nu : & \mathcal{A} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & A & \longmapsto & \alpha\mu(A) + \beta\nu(A) \end{array}$$

est encore une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice II : Soient X un ensemble non dénombrable et $\mathcal{A}$ définie par

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable } \} \ .$$

1) Vérifier que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

2) Soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable et $\mu(A) = 1$ sinon. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice III : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$.

Comparer $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Exercice IV : On munit $\mathbb{N}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ l'application définie par $\mu(A) = \text{card}(A)$, si A est fini, et $\mu(A) = +\infty$, si A est infini.

1) Que peut-on dire de la réunion d'une infinité dénombrable de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes lorsque cette réunion est de cardinal fini ?

2) Montrer que μ est une mesure *(appelée mesure de comptage sur* $\mathbb{N}$*)*.

3) On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_n := \{n,\, n+1,\, \cdots\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\mu\left(\cap_{n=0}^{\infty} A_n\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Que remarque-t-on ?

Exercice V : On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Soit $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to [0, +\infty]$ l'application définie par $m(A) = \displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n^2}$ si A est fini et $m(A) = +\infty$ si A est infini.

Montrer que l'application m est additive sans être σ-additive .

Exercice VI : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et I un élément de $\mathcal{A}$.
On pose $\mathcal{A}_I := \{A \cap I \mid A \in \mathcal{A}\}$.

1) Vérifier que $\mathcal{A}_I$ est une tribu sur I incluse dans $\mathcal{A}$ et que la restriction μ_I de μ à $\mathcal{A}_I$ est une mesure sur $(I, \mathcal{A}_I)$.

2) Montrer que $\mathcal{B} := \{A \times I \mid A \in \mathcal{A}_I\}$ est une tribu sur $Y := I \times I$.

3) Soit m la fonction définie sur $\mathcal{B}$ par $m(A \times I) = \mu_I(A)$. Montrer que m est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Exercice VII : Soit X un ensemble et a un élément de X. On définit la mesure de Dirac en a par :

$$\delta_a(A) := \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & a \in A \\ 0 & \text{si} & a \notin A \end{array} \right. , \quad \text{pour toute partie } A \text{ de } X.$$

Montrer que δ_a est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Quelle est la plus grande partie négligeable de X ?

Exercice VIII :

A. Soit X un ensemble et $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de parties de X.

On pose

$$\limsup(A_n) = \bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$$

$$\liminf(A_n) = \bigcup_{n \geqslant 0} \bigcap_{k \geqslant n} A_k$$

Exprimer en français

$$x \in \limsup(A_n) \quad ; \quad x \notin \limsup(A_n) \quad ; \quad x \in \liminf(A_n) \quad \text{et} \quad x \notin \liminf(A_n) \ .$$

B. Soient X un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu de X et μ une mesure sur $\mathcal{A}$.

Soient également $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1) Vérifier que $\limsup(A_n)$ et $\liminf(A_n)$ sont éléments de $\mathcal{A}$.

2) Montrer que

$$\mu(\liminf(A_n)) \leqslant \liminf(\mu(A_n))$$

et que, s'il existe un entier n_0 tel que $\mu\left(\cup_{n \geqslant n_0} A_n\right) < +\infty$, alors

$$\limsup(\mu(A_n)) \leqslant \mu(\limsup(A_n)) \ .$$

Exercice IX : On définit par récurrence une suite de sous-intervalles de $[0,1]$ en posant $A_0 := [0,1]$ et, pour $n \geqslant 0$,

$$A_{n+1} := \left(\frac{1}{3}A_n\right) \bigcup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A_n\right) .$$

Pour $n \geqslant 1$, on note $T_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} \mid x_k \in \{0,2\} \right\}$.

1) Représenter graphiquement A_1 et A_2, T_1 et T_2.

2) Soient t, t' deux éléments distincts de T_n, $n \geqslant 1$. Montrer que l'on a $|t - t'| \geqslant 2/3^n$.

3) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = \displaystyle\bigcup_{t \in T_n} \left[t, t + \frac{1}{3^n}\right]$.

4) On définit l'ensemble de Cantor par $C := \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

(a) Montrer que C est compact.

(b) Montrer que C est négligeable et d'intérieur vide.

5) Montrer que $C = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \mid x_k \in \{0, 2\} \right\}$.

6) En construisant une bijection de C dans $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, montrer que C n'est pas dénombrable.

Exercice X :

1) Soit ν une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ finie sur les intervalles bornés. On pose

$$F(x) := \begin{cases} \nu(]0, x]) & \text{pour tout } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ -\nu(]x, 0]) & \text{pour tout } x < 0 \end{cases} .$$

Montrer que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite et que l'on a

$$\forall a < b \ , \quad \nu(]a, b]) = F(b) - F(a) \ .$$

(ν est la mesure de Lebesgue-Stieljes associée à F.)

2) Déduire du point précédent que si ν est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ finie sur les intervalles bornés et invariante par translations alors il existe $k \geqslant 0$ tel que $\nu = k\ \lambda$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. (Ind. : on calculera $F(a + b)$, pour $a, b \in \mathbb{R}$.)

Exercice XI : *Un exemple de partie de $\mathbb{R}$ non mesurable.*

Pour α dans $[0, 1[$, on considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \tau_\alpha : & [0, 1[& \longrightarrow & [0, 1[\\ & x & \longmapsto & x + \alpha - [x + \alpha] \end{array} ,$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que τ_α est une bijection de $[0, 1[$ et que, pour toute partie mesurable A contenue dans $[0, 1[$, on a $\lambda\left(\tau_\alpha(A)\right) = \lambda(A)$.

2) Pour tout x dans $[0, 1[$, on pose $\mathcal{O}(x) = \{\tau_\alpha^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Vérifier que ces ensembles $\mathcal{O}(x)$, $x \in [0, 1[$, forment une partition de $[0, 1[$.

3) On suppose à présent que α est irrationnel et l'on considère un ensemble N obtenu en choisissant un point et un seul dans chacun des éléments de la partition introduite au point précédent.

En raisonnant par l'absurde et en considérant successivement les deux cas : $\lambda(N) = 0$ et $\lambda(N) > 0$, montrer que N n'est pas mesurable.