Université de Bretagne Occidentale | L3-Maths
Faculté des Sciences et Techniques | Intégrale de Lebesgue
Département de Mathématiques | *Année 2015-2016*

Feuille 10 - Séries de Fourier

Rappels : Lorsque f est à valeurs réelles intégrables sur $[a, a+T]$, les coefficients réels (ou trignométriques) sont définis par les formules

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(2\pi nx/T)dx \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin(2\pi nx/T)dx\,,$$

et dans ce cas la série de Fourier $[f]$ de f est donnée par

$$[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(2\pi nx/T) + b_n(f)\sin(2\pi nx/T)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{2\pi inx/T}\,.$$

où

$$c_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+P} f(x)e^{-2\pi inx/T}dx$$

En un point de discontinuité $x = b$, la série de Fourier converge vers

$$\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}(f(b+\epsilon) + f(b-\epsilon))\,.$$

La formule de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2dx = \sum_{-\infty}^{+\infty}|c_r|^2 = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}({a_k}^2 + {b_k}^2)\,.$$

Exercice I : Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k+\ell)x}dx, \quad \int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(\ell x)dx, \quad \int_0^{2\pi}\sin(kx)\sin(\ell x)dx, \quad \int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(\ell x)dx$$

Exercise II : Étudier la convergence (simple, uniforme, normale) sur $\mathbb{R}$ des séries trigonométriques dont les coefficients sont les suivants :

(i) $a_0 = 1, a_n = 1, b_n = 1$;
(ii) $c_0 = 1, c_n = 1/n^2$;
(iii) $n \geqslant 0, c_n = r^n$ et $n \leqslant -1, c_n = 0$ avec $r \in \mathbb{R}$.
En déduire que pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $-1 < r < 1$,

$$r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-inx}}{1 - re^{ix}}dx\,.$$

Exercice III : Calculer $a_n(f), b_n(f), c_n(f)$ et tracer les graphes des fonctions 2π–périodiques suivantes :

(i) $f(x) = -1$ sur $[-\pi, 0[$ et $f(x) = 1$ sur $[0, \pi[$;
(ii) $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$;
(iii) $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi[$.

Exercice IV : a. Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction $f(x) = \cos^3 x$.

b. Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction qui vaut 1 sur $]0, \pi[$ et -1 sur $]-\pi, 0[$. En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c. Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f telle que, sur $[-\pi, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$. En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} .$$

Exercice V : Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \pi$. On définit deux fonctions f_a et g_a par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [0, \pi - a] \\ 1 & \text{sur} \quad]\pi - a, \pi + a[\\ 0 & \text{sur} \quad [\pi + a, 2\pi] \end{cases} \qquad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [-\pi, -a] \\ 1 & \text{sur} \quad]-a, +a[\\ 0 & \text{sur} \quad [+a, \pi] \end{cases}$$

Vérifier que $g_a = 1 - f_{\pi - a}$, et calculer les coefficients de Fourier réels de ces fonctions. En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(na)}{n}$$

Exercice VI : Soit P un polynôme pair de degré 4 vérifiant les conditions

$$P'(\pi) = 0, \quad P'''(\pi) = 1, \quad \int_0^{\pi} P(x)dx = 0 .$$

Déterminer les coefficients de Fourier d'une fonction f périodique de période 2π qui coincide avec P sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En déduire les sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$$

Exercice VII : (Convolution) Le produit de convolution de deux fonctions intégrable périodique de période 2π est défini par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t)g(t)dt$$

1. Montrer que $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

2.a. On suppose f et g deux fonctions continues bornées. Montrer que

$$||f * g||_\infty \leqslant ||f||_\infty ||g||_\infty \,.$$

b. Calculer $(e^{inx}) * (e^{imx})$.

c. On suppose $f, g \in L^2([0, 2\pi])$. Montrer que $||f * g||_2 \leqslant ||f||_2 ||g||_2$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit ϕ_n la fonction qui vaut n sur $]-\pi/n, \pi/n[$ et 0 sur $[-\pi, -\pi/n] \cup [\pi/n, \pi]$. Soit f intégrable continue sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} f * \phi_n(x) = f(x) \,.$$

4. Déterminer le produit de convolution $f * g$ lorsque f est la fonction cosinus ou sinus et $g(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$.