Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L3-Maths
Intégrale de Lebesgue
Année 2015-2016

Feuille 9 - Espaces de Hilbert

Exercice I : a) (Distance à un sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Banach) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, et F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions impaires dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle. Soit ϕ l'élément de E donné par $\phi(t) = t$.

a) Montrer que F est fermé.

b) Montrer que la distance de ϕ est égale à $1/2$ mais que l'on a $||\phi - \psi|| \geqslant 1/2$ pour tout $\psi \in F$. (Le théor1̀eme de projection sur un convexe fermé est donc faux dans un espace de Banach où la norme ne dérive pas d'un produit scalaire).

Exercice II : a) Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

b) Soit $c_{00}(\mathcal{N})$ l'espace préhilbertien des suites nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $< u, v >= \sum_{n \in \mathcal{N}} u_n v_n$. Soit f la forme linéaire sur $c_{00}(\mathcal{N})$ donnée par

$$f(u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{u_n}{n+1}$$

Montrer que $\ker(f)$ est un hyperplan fermé, et que $(\ker(f))^{\perp} = \{0\}$.

c) Plus généralement, montrer que dans tout espace pré-hilbertien non complet, il existe un hyperplan fermé dont l'orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Exercice III : a) L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. Pour a fixé dans $\mathbb{R}^n$, établir une formule explicite pour l'opérateur de projection sur $a + \mathbb{R}^n_+$.

b) Soit $H = L^2([0, 1])$ et $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Pour $u_0 \in H$, on considère l'nsemble

$$C := \{u \in H : u \geqslant u_0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé et donner une formule pour P_C.

Exercice IV : (Système de Hermite)

(i) a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}.$$

b. Calculer le coefficient de plus haut degré de H_n.

(ii) Soit $\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $\phi_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2^n\sqrt{\pi}\,n!}}H_n(x)e^{-x^2/2}$.

a. Montrer que la fonction ϕ_n appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ quel que soit l'entier n.
b. Calculer les produits scalaires $<\phi_n,\phi_m>_{L^2}$ pour tout couple d'entiers (n,m).
c. En déduire que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthormal de $L^2(\mathbb{R})$.

(iii) a. Soit $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P_n^{\ell}(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i\xi x)^k}{k!}\,.$$

Montrer que
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $P_n^{\ell}(x)\to e^{-i\xi x}$ lorsque $n\to\infty$;
- $\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $|P_n^{\ell}(x)|\leqslant e^{|\xi x|}$.

b. Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$. On suppose que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $<\phi_n,f>_{L^2(\mathbb{R})}=0$. Soit $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x^2/2}f(x)$. Montrer que g appartient à $L^1(\mathbb{R})$ puis montrer que

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\ \hat{g}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}g(x)dx=0\,.$$

(Indication : on pourra calculer les intégrales $\int_{\mathbb{R}}P_n^{\ell}(x)g(x)dx$). En déduire qe f est identiquement nulle.
c. Conclure que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice V : (Polynômes de Laguerre)
Soit $H=\{f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}|\int_0^{+\infty}|f(x)|^2e^{-x}dx<\infty\}$. On admet que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall(f,g)\in H^2,\ <f,g>=\int_0^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx\,.$$

1.a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_n à coefficients réels tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=n!L_n(x)e^{-x}\,.$$

b. Calculer le degré, ainsi que le coefficient de plus haut degré de L_n.
c. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique de $\mathbb{C}[x]$.

2.a. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Calculer le produit scalaire $<L_n,L_m>$.
b. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal de H.
c. Conclure que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
(Indication : on pourra admettre la densité du sous-espace des fonctions polynomiales dans l'espace H).

Exercice VI : Soit $H=L^2([-1,1])$ muni de son produit scalaire $<f,g>=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)d\lambda(x)$ et soit $F=\{f\in H:f(-x)=-f(x)\}$ (les fonctions impaires). Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé et expliciter l'opérateur de projection de H sur F.